

個別要素法による平面ひずみ圧縮下における粒状体の せん断帯形成過程の把握

棚 橋 由 彦* ・ 濱 崎 正 一**
熊 川 貴 伯***

Shear Band Generating Process of Granular Material under Plane Strain Compression Using by Distinct Element Method

by

Yoshihiko TANABASHI*, Seiichi HAMASAKI**
and Takamichi KUMAGAWA***

It is fairly important to estimate a generating process of shear band in granular material such as sand has been recently noteworthy concerning with progressive failure in the micro-mechanics. This paper deals with a numerical simulation for the above tests using by Distinct Element Method (DEM) developed by Cundall, P. A. (1971).

This paper discusses that the relationships between generating process of shear band, the variation of co-ordination number, dilatancy angle, equivalent diameter of 2-dimensional column and macro stress ratio-strain relationships.

1. はじめに

砂等の粒状体がせん断破壊を起こすとき、その過程でせん断帯 (shear band) を形成することが一般に知られている。せん断帯とは、せん断変形が局所化した領域のことであり、特に進行性破壊の場合重要視される。しかし、その全容は未だ明らかにされていない。一方、不連続体を取り扱う1手法として、カンドル (Cundall, P. A., 1971) の提唱した個別要素法 (Distinct Element Method, 以下 DEM と略称) がある¹⁾。この手法は、通常の有限要素法 (Finite Element Method) のような連続体解析手法では困難であった砂等の粒状体や亀裂性岩盤など、不連続体の動的挙動を取り扱うのに適している。このような特徴を生かし、近年粒状体や亀裂性岩盤に関するいくつかの研究がなされ、その有用性が確認されている。この手法を用いて破壊を

逐次追跡し、せん断帯の形成過程を観察することが可能であり、せん断帯形成過程の把握に適している。また、粒状体のせん断破壊には、ダイレイタンシー (dilatancy) が関与する。このダイレイタンシー特性もせん断帯と無関係でなく、これを取り扱う上で無視することのできない重要な特性の1つである。

本報告では、粒状体モデルとして等粒径円形の規則配列を用い、以上のようなせん断破壊を平面ひずみ圧縮試験で DEM を用いてシミュレートする。その結果より、せん断帯形成過程を粒子の配位数およびダイレイタンシー角を用いて考察した。

2. 個別要素法の原理²⁾

2.1 運動方程式

剛体ブロックの運動には、重心の並進運動と重心ま

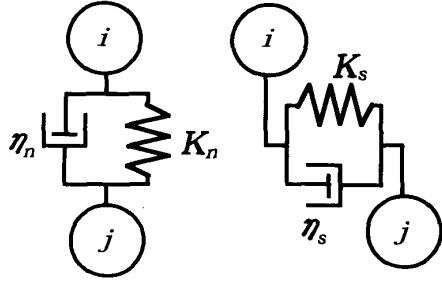
平成9年10月28日受理

*社会開発工学科 (Civil Engineering Department, Nagasaki Univ.)

**長崎県対馬支庁 (Tsushima Branch, Nagasaki Prefecture Office)

***大学院工学研究科社会開発工学専攻 (Graduate Student, Civil Engineering Specialty)

わりの回転運動を伴う。また、2つの粒子が接触あるいは衝突する時、粒子は完全な弾性体ではないし、また接触点近傍は、局所的な塑性変形や破損などのために、完全弾性衝突とはならない。粒子のもつ弾性的、非弾性的性質は、接触点間に挿入したフォークト (Voigt) モデル (弾性スプリングと粘性ダッシュポットの並列配列) で表現する (Fig. 1)。



(a) Normal direction (b) Tangential direction

Fig. 1 Model of contact point

(1) 重心の並進運動に関する運動方程式

粒子の質量 m 、並進に伴う未知変位 u 、弾性スプリングの剛性定数 K 、粘性ダッシュポットの粘性定数 η とすれば、並進に伴う運動方程式は次のようになる。

$$m\ddot{u} + \eta\dot{u} + Ku = F \quad (1)$$

ここに、 F は外力を表す。

(2) 重心まわりの回転に関する運動方程式

粒子の質量 m および慣性モーメント I 、回転に伴う未知回転量 ϕ 、弾性スプリングの剛性定数 K 、粘性ダッシュポットの粘性定数 η とすれば、回転に関する運動方程式は次のようになる。

$$I\ddot{\phi} + \eta r^2 \dot{\phi} + Kr^2 \phi = M \quad (2)$$

ここに、 M は外力によるモーメントを、 r は重心からの距離を表す。

2.2 接触力

2要素 i, j の接触面に作用する力を、法線方向に作用する圧縮力 f_n と、接線方向に作用するせん断力 f_s (要素 i に関して時計回りを正) に分けて考える。

(1) 法線方向の作用力

時間増分 Δt 間の法線方向の相対変位増分 Δu_n に比例した抗力増分 Δe_n を生じる弾性スプリング (剛性定数 K_n) と、相対変位速度 $\Delta u_n / \Delta t$ に比例した抗力増分 Δd_n を生じる粘性ダッシュポット (粘性定数 η_n) の並列配列を考える (Fig. 1 (a))。

$\Delta e_n, \Delta d_n$ は次式で表せる。

$$\Delta e_n = K_n \cdot \Delta u_n$$

$$\Delta d_n = \eta_n \cdot \frac{\Delta u_n}{\Delta t} \quad (3)$$

ただし、圧縮力を正とする。

したがって、時刻 t において接線方向に作用する弾性抗力 $[e_n]_t$ と粘性抗力 $[d_n]_t$ は次式の様になる。

$$[e_n]_t = [e_n]_{t-\Delta t} + \Delta e_n$$

$$[d_n]_t = \Delta d_n \quad (4)$$

また、上式には次式の条件が付される。

$$[e_n]_t < 0 \text{ のとき } [e_n]_t = [d_n]_t = 0 \quad (5)$$

以上より、時刻 t における2要素間の法線方向圧縮力 $[f_n]_t$ は次式で計算される。

$$[f_n]_t = [e_n]_t + [d_n]_t \quad (6)$$

(2) 接線方向の作用力

接線方向の相対変位増分 Δu_s (要素 i に関して時計回りを正) に対しても同様にせん断抗力を与えるフォークト (Voigt) モデル (せん断剛性定数 K_s 、せん断粘性定数 η_s) を考える (Fig. 1 (b))。 $\Delta e_s, \Delta d_s$ は次式で表せる。

$$\Delta e_s = K_s \cdot \Delta u_s$$

$$\Delta d_s = \eta_s \cdot \frac{\Delta u_s}{\Delta t} \quad (7)$$

したがって、時刻 t における接線方向の弾性抗力 $[e_s]_t$ と粘性抗力 $[d_s]_t$ (いずれも要素 i に関し時計回りを正) は次式の様になる。

$$[e_s]_t = [e_s]_{t-\Delta t} + \Delta e_s$$

$$[d_s]_t = \Delta d_s \quad (8)$$

上式には、次の2つの条件が付される。

$$[e_n]_t < 0 \text{ のとき } [e_s]_t = [d_s]_t = 0$$

$$|[e_s]_t| > \mu [e_n]_t \text{ のとき}$$

$$\begin{cases} [e_s]_t = \mu [e_n]_t \times \text{SIGN}([e_s]_t) \\ [d_s]_t = 0 \end{cases} \quad (9)$$

ここに、 μ は粒子間の摩擦係数、 $\text{SIGN}(Z)$ は変数 Z の正負を表すものとする。これらの条件は、接触点近傍のせん断変形が主として要素間の摩擦力によって生ずることを意味し、条件式(9)前者は非接触状態を、後者は摩擦力の限界をそれぞれ表している。以上

より、時刻 t における 2 要素間の接線方向のせん断力 $[f_s]_t$ は次式で計算される。

$$[f_s]_t = [e_s]_t + [d_s]_t \quad (10)$$

2.3 運動方程式の差分近似

注目する要素 i と接触するすべての要素 j について先述した様な形で、接触力 $[f_n]_t$ 、 $[f_s]_t$ が計算されると、要素 i に関するそれらの x 方向の分力 x_i 、 y 方向の分力 y_i ならびに中心回りのモーメント M_i (反時計回りを正) は次式で求められる。

$$\begin{aligned} [x_i] &= \sum_j \{ -[f_n]_t \cos \alpha_{ij} + [f_s]_t \sin \alpha_{ij} \} - m_i g \\ [y_i] &= \sum_j \{ -[f_n]_t \sin \alpha_{ij} - [f_s]_t \cos \alpha_{ij} \} \\ [M_i] &= -r_i \cdot \sum_j \{ [f_s]_t \} \end{aligned} \quad (11)$$

ここに、 Σ は要素 i に接触するすべての要素 j に関する総和を表し、また m_i は要素 i の質量であり、 $m_i g$ の項は重力が X 方向に作用することによる。加速度を作用力の陽関数とみなして変形した運動方程式 (式省略) を、時間増分 Δt で差分近似すれば、作用力は (11) 式で与えられるから、時刻 t における加速度は、次式の様に求まる。

$$\begin{aligned} [\ddot{u}_i]_t &= [x_i]_t / m_i \\ [\ddot{v}_i]_t &= [y_i]_t / m_i \\ [\ddot{\phi}_i]_t &= [M_i]_t / I_i \end{aligned} \quad (12)$$

ここに、 I_i は要素 i の慣性モーメントを表す。時刻 t における変位速度は、式(12)を時間増分 Δt に関して積分して、

$$\begin{aligned} [\dot{u}_i]_t &= [\dot{u}_i]_{t-\Delta t} + [\ddot{u}_i]_t \cdot \Delta t \\ [\dot{v}_i]_t &= [\dot{v}_i]_{t-\Delta t} + [\ddot{v}_i]_t \cdot \Delta t \\ [\dot{\phi}_i]_t &= [\dot{\phi}_i]_{t-\Delta t} + [\ddot{\phi}_i]_t \cdot \Delta t \end{aligned} \quad (13)$$

式(13)をさらに Δt で積分すれば、時間増分 Δt 間の変位増分は次式となる。

$$\begin{aligned} [\Delta u_i]_t &= \{ [\dot{u}_i]_{t-\Delta t} + [\dot{u}_i]_t \} \cdot \Delta t / 2 \\ [\Delta v_i]_t &= \{ [\dot{v}_i]_{t-\Delta t} + [\dot{v}_i]_t \} \cdot \Delta t / 2 \\ [\Delta \phi_i]_t &= \{ [\dot{\phi}_i]_{t-\Delta t} + [\dot{\phi}_i]_t \} \cdot \Delta t / 2 \end{aligned} \quad (14)$$

式(3)から(14)に至る一連の過程で定められた変位増分を

(時刻 t から $t + \Delta t$ まで) 新たな変位増分に仮定して、再び演算を繰り返す^{4) 5)}。

3. 平面ひずみ圧縮試験⁶⁾

3.1 解析モデルの概要

用いる要素は等粒径円形とし、DEM を用いて平面ひずみ圧縮試験をシミュレートした。ただし、要素半径 r は 0.9、1.0 cm の 2 ケースとし、他の定数は Table 1、2 に示すとおりである。平面ひずみ圧縮試験をシミュレートする際の供試体寸法は、底辺 36 cm、高さ 72 cm の単位幅あたりとした。解析過程は、初期配列時に発生する粒子浮遊状態から、静止状態を得た後、等方圧密 ($\sigma_r = 0.1, 0.2, 0.4 \text{ kgf/cm}^2$, σ_r : 等方圧密圧) し (圧密過程) せん断する (せん断過程)。ただし、せん断過程はひずみ制御 (ひずみ速度: 1 cm/s) で行うものとする。なお、解析に用いた粒子配列は、13/14、15/16、17/18 の 3 パターンで、各配列の要素数および初期粒子間接触角 α は Table 3 に示すとおりである。

Table 1 Material properties^{3) 4)}

radius: $r(\text{cm})$	1.0
density: $\rho(\text{g/cm}^3)$	2.65
Young's modulus: $E(\text{kgf/cm}^2)$	750
Poisson's ratio: ν	0.3

Table 2 Interaction properties^{3) 4)}

	particle to particle	particle to wall
$K_n / \rho g(\text{cm})$	3.64×10^4	7.28×10^4
$\eta_n / \rho g(\text{cm/s})$	1.53×10	3.06×10
$K_s / \rho g(\text{cm})$	0.91×10^4	1.83×10^4
$\eta_s / \rho g(\text{cm/s})$	0.76×10	1.53×10
$\Delta t(\text{s})$	1.00×10^{-4}	
friction angle, ϕ	30°	$45^\circ, 5^\circ \times$

Table 3 Analytic condition⁶⁾

radius: $r(\text{cm})$	arrangement	number of elements, N	contact angle, α
0.9	13/14	797	47.362°
	15/16	806	39.810°
	17/18	858	34.469°
1.0	13/14	635	40.863°
	15/16	682	34.540°
	17/18	718	30.017°

3.2 結果と考察

(1) **せん断帯** Fig. 2 に, 一例として15/16配列 ($r=1.0\text{cm}$, $\sigma_r=0.1\text{kgf/cm}^2$) の $\epsilon_1=0.505$ (%) 毎の変形図を示す。また, それと対比した形で Fig. 3 に応力比 η とひずみ ϵ の関係を示す。図中に示すアルファベットは変形図に対応している。応力比 η が η_{\max} に達するまで, すなわちひずみ硬化領域 (Fig. 2 (a), (b)) では, 要素自体の移動はほとんどなく, 粒子間接触力ベクトルの傾きが, η_{\max} に近づくにつれ, 鉛直方向に卓越したものとなる。 η_{\max} 以降 (Fig. 2 (c)) は,

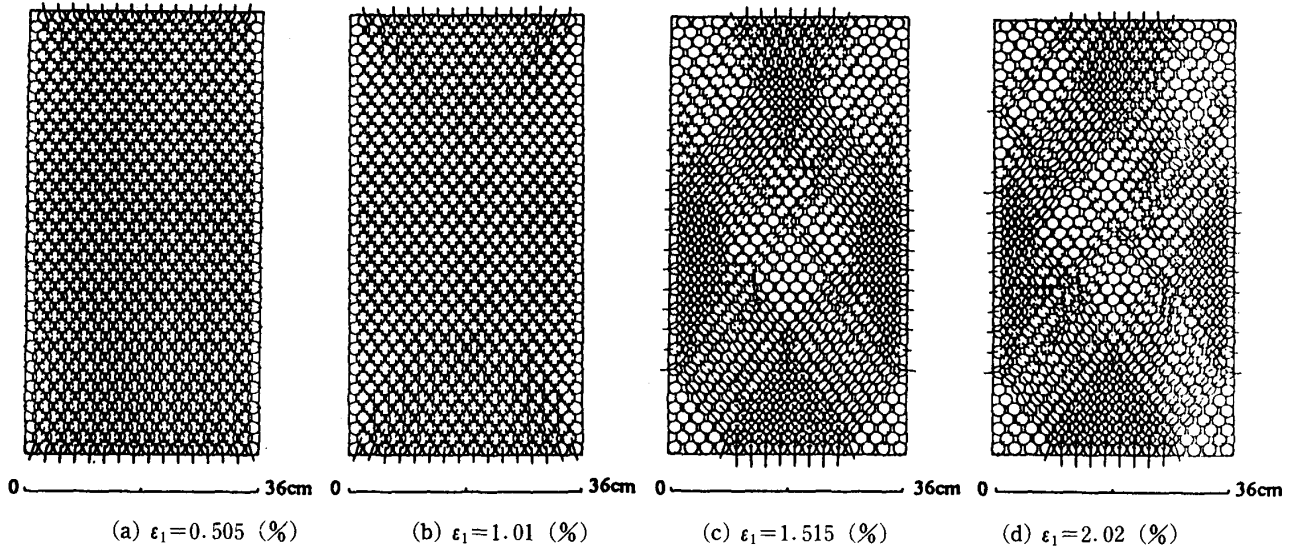


Fig. 2 Calculated contact force vectors and deformation diagrams
(15/16, $r=1.0\text{cm}$, $\sigma_r=0.1\text{kgf/cm}^2$)

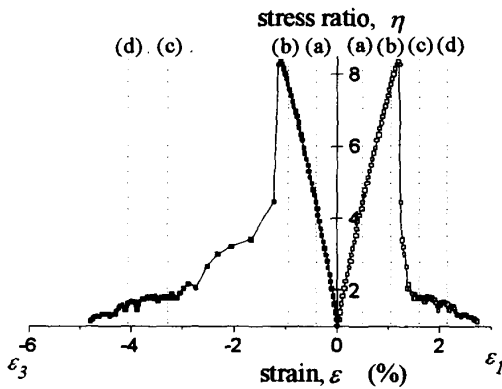


Fig. 3 η vs. ϵ relationship (15/16)

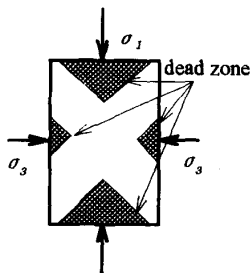


Fig. 4 Dead zone

Fig. 4 に示すような粒子自体が変動しない領域 (仮に dead zone と名づける) を形成しながら変形し, 更には破壊に至る。dead zone は, Fig. 2 (c) に顕著に現れている。Fig. 5 は, 17/18配列 ($r=1.0\text{cm}$, $\sigma_r=0.1\text{kgf/cm}^2$) における要素別変位増分量を図示したものである。この状態は, Fig. 2 (c) を経過した後のものである。せん断帯が顕在化し, その状況を図の×印 (変位増分量の多い要素) が表している。この場合せん断帯の幅は, 図中の D_s ($\approx 25\text{cm}$) であると言える。

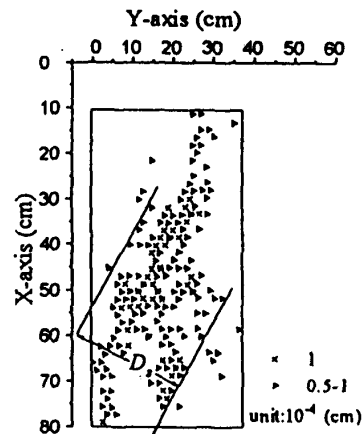


Fig. 5 Increment of deformation for each element
(17/18)

(2) **初期粒子間接触角と粒径の与える影響** Fig. 6 は応力比 η とひずみ ϵ の関係で, 初期粒子間接触角 α ($\approx 34^\circ$) のほぼ等しい15/16配列と17/18配列を粒径の違い ($r=0.9$, $r=1.0\text{cm}$) で比較したものである。17/18配列, $r=0.9\text{cm}$ のピークが多少低い, 同じような

挙動を示している。また、Fig. 7 (a)に $\sigma_r=0.1\text{kgf/cm}^2$ における13/14配列, $r=1.0\text{cm}$, Fig. 7 (b)に15/16配列, $r=0.9\text{cm}$ の変形図を示す。これも初期粒子間接触角 α ($\approx 40^\circ$) が等しい。dead zoneを除いたX字状の形状(特に角度)がほぼ等しい。しかし、その幅は両者で多少異なる。つまり、せん断帯の方向は粒子間接触角 α に依存し、その幅は粒子径によるものと考えられる。

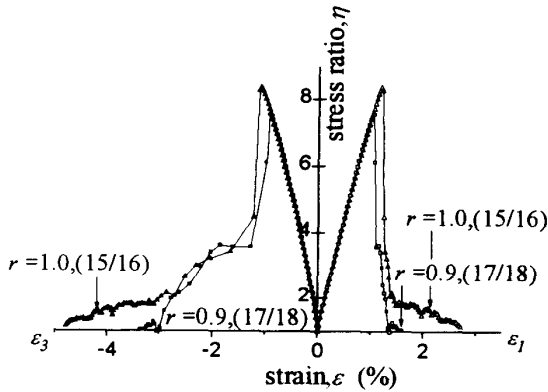


Fig. 6 μ vs. ϵ relationship ($\alpha \approx 34^\circ$)

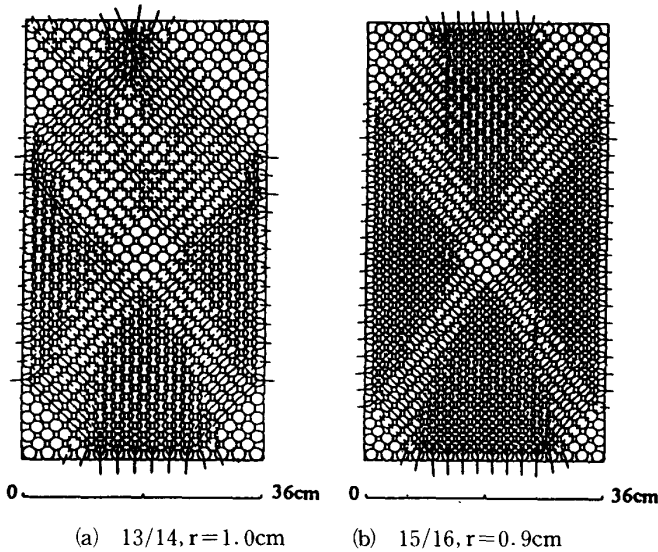


Fig. 7 Calculated contact force vectors and deformation diagram

(3) ダイレイタンシー角およびコンプライアンス法との比較 Fig. 8 に17/18配列, $r=1.0\text{cm}$, $\sigma_r=0.1\text{kgf/cm}^2$ における、ダイレイタンシー角 ϕ_d 、体積ひずみ ϵ_v と鉛直軸ひずみ ϵ_l の関係を示す。ひずみ硬化領域初期において、負のダイレイタンシー角 ϕ_d を示し、配位数 $N_c=6$ が4への転換する時点、すなわち図中(a)で急激に増加、そして正のダイレイタンシー角 ϕ_d となる(配位数変動に関してはFig. 9参照)。ここに、

配位数とは1粒子あたりの接点数をいう。さらに、 η_{\max} 直後に $\phi_{d\max}$ となり、ひずみ軟化領域では $\phi_d=0$ に収束する傾向を示す。つまり、せん断帯が発生する過程でダイレイタンシー角 ϕ_d が増加するものと考えられる。次に、最大ダイレイタンシー角 $\phi_{d\max}$ と内部摩擦角 ϕ の関係をFig.10に示す。内部摩擦角 ϕ の増加とともに最大ダイレイタンシー角 $\phi_{d\max}$ も増加する傾向にある。ところで、3.3 (4)せん断強度で述べたように、内部摩擦角 ϕ は初期粒子間接触角 α に依存する。したがって、最大ダイレイタンシー角 $\phi_{d\max}$ も初期粒子間接触角 α に関係するといえる。

せん断帯の方向(角度)の算出方法の1つにコンプライアンス法がある。これを用いて、先に示した15/16配列, $r=1.0\text{cm}$, $\sigma_r=0.1\text{kgf/cm}^2$ について計算を行う。ただし、ダイレイタンシー角 ϕ_d は刻々と変化するため、Fig. 2 (c)に対応したものを採用する。これと変形図より視覚的に求めた角度をTable. 4に示す。これからわかるように、両者はほぼ等しい値であるといえる。

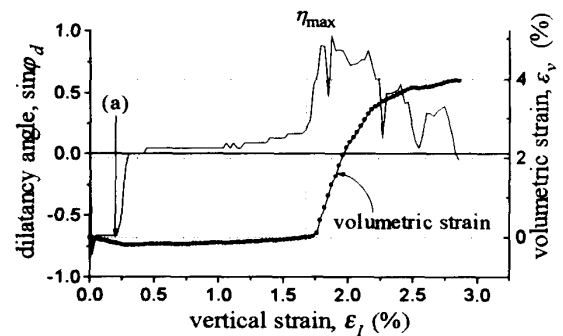


Fig. 8 Relationship between ϕ_d , ϵ_v and ϵ_l (17/18)

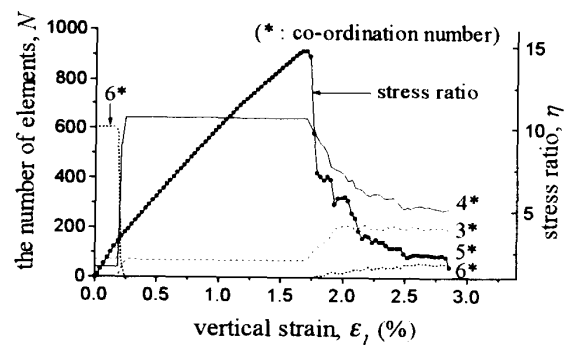


Fig. 9 Relationship between N , η and ϵ_l (17/18)

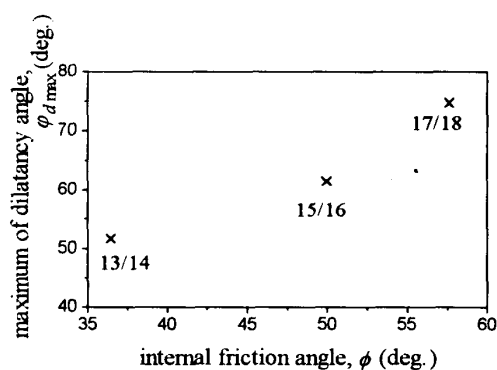
Fig.10 ϕ_{dmax} vs. ϕ relationship

Table 4 Shear band angle

arrangement	Compliance Method	DEM
15/16	59.435°	61°

4. まとめ

本研究より得られた結果を以下に総括する。

- i) 粒状体が進行性破壊を起こすとき、粒子の配位数 N_c が高位から低位状態へ刻々と変化する。
- ii) セン断帯の方向は初期粒子間接触角 α に、またその幅は粒径に依存し、幅は粒径の約10倍である。
- iii) 内部摩擦角 ϕ の増加とともに、最大ダイレイタンスー角 ϕ_{dmax} も増加する傾向にある。

謝 辞

本研究を遂行するにあたり、数々の助言を頂戴した木山英郎教授・西村 強助手（鳥取大学工学部）に、深甚の謝意を表する次第である。

参 考 文 献

- 1) 木山英郎・藤村 尚：カンドルの離散剛要素法を用いた岩質粒状体の重力流動の解析，土木学会論文集，Ⅲ-No.333，pp.137-146，1983.
- 2) Cundall, P. A.: A Computer Model for Simulating Progressive, Large-scale Movement in Blocky Systems, Symp. ISRM, Nancy, France, Proc. Vol.2, pp.129-136, 1971.
- 3) 木山英郎・藤村 尚・西村 強：せん断モデルを用いた離散剛要素法の材料定数の検討，土木学会論文集，Ⅲ-No.382，pp.167-174，1987.
- 4) 棚橋由彦・濱崎正一・西村 強・木山英郎：一面せん断試験における粒状体の進行性破壊とダイレイタンスー特性の個別要素法による把握，長崎大学工学部研究報告，Vol.27, No.48，pp.151-159，1997.
- 5) 濱崎正一・棚橋由彦・西村 強・木山英郎：DEMによる一面せん断試験下の粒状体の進行性破壊とダイレイタンスー特性の把握，平成8年度土木学会西部支部研究発表会講演概要集，III-110，pp.582-583，1997.
- 6) 棚橋由彦・濱崎正一・西村 強・木山英郎：個別要素法による円柱積層体の平面ひずみ圧縮試験下におけるせん断帯形成過程の把握，第32回地盤工学研究発表会講演概要集，pp.499-500，1997.